数理解析研究所講究録
第 1540 巻 2007 年 56-66

Morse functions with sphere fibers

佐伯 修*
(九州大学大学院数理学研究院)

1 はじめに

本稿の内容は [11] に基づいている．詳細についてはそちらを参照していただきたい．

以下，多様体や多様体間の写像は C^∞ 級であるものとする．M を n 次元多様体とし，$f: M \to \mathbb{R}^p$ を C^∞ 級写像とする．ただし $1 \leq p \leq n$ とする．このとき，f の正則値 $y \in \mathbb{R}^p$ に対して，その逆像 $f^{-1}(y)$ は，空集合でなければ $n-p$ 次元の多様体となる．これを f の**正則ファイバー**と呼ぶ．一般にはこうした正則ファイバーとして様々な多様体が現れるが，本稿では次の問題を考えてみる．

問題 1.1 上のような C^∞ 級写像 f が「単純な」正則ファイバーしか持たないとき，定義域多様体 M の微分位相幾何学的な性質を調べよ．

このような問題を考える動機を説明しよう．$f: M \to \mathbb{R}^p$ を C^∞ 級写像で，$n = \dim M > p \geq 1$ であり，M は閉多様体であるとする．

定義 1.2 上のような写像 f が，**定値折り目特異点**，すなわち，局所座標を用いて

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2)$$

と f が局所的に書き表せるような点しか特異点に持たないとき，f を **special generic map**（以下 SGM と略記）という（詳細については [1, 10] 等を参照）．

* *e-mail*: saeki@math.kyushu-u.ac.jp
home page: http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~saeki

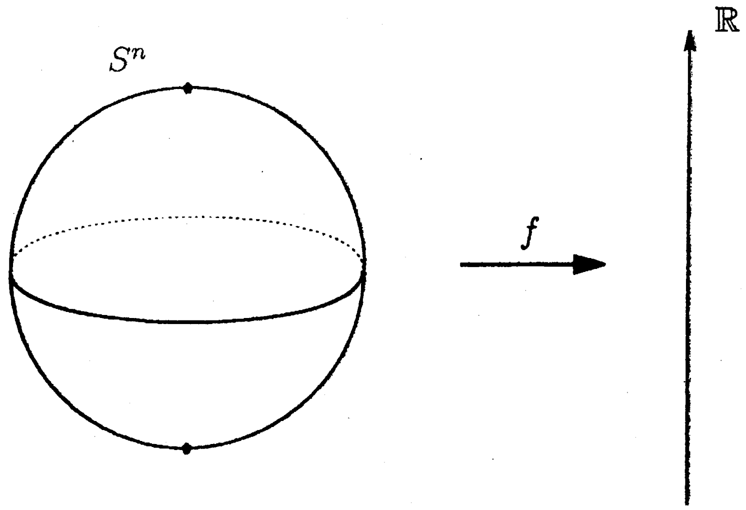

図 1: S^n 上の高さ関数は SGM の典型例

たとえば，$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の単位球面 S^n 上の「高さ関数」

$$f : S^n \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1}$$

は典型的な SGM である（図 1 参照）．

定値折り目特異点はすべてのジェネリックな特異点の中で，ある意味でもっとも単純なものである．したがって，一般のジェネリックな可微分写像の大域的な微分位相幾何学的性質を調べるための最初のステップとして，上記のような SGM を考えることは自然であろう．

定値折り目特異点の近くにある正則ファイバーを調べることにより，SGM の正則ファイバーの各連結成分は $n-p$ 次元の標準的な球面に微分同相であることがわかる．したがって，上述のような研究を遂行するには，正則ファイバーが球面の非交和になっているような可微分写像を調べる必要がある．

高次元においては，単に標準的な球面だけを扱うよりも，次のような対象を考えることの方が自然である．

定義 1.3 m 次元閉多様体 F が，2 つの m 次元球体 D^m を境界に沿って貼り合わせてできる多様体と微分同相であるとき，すなわち $F \cong D^m \cup_\partial D^m$ となるとき，F を **almost sphere** という（図 2 参照）．

標準的な球面はもちろん almost sphere であるが，その逆は必ずしも正しくない．実際 7 次元以上では，ホモトピー球面と almost sphere の概

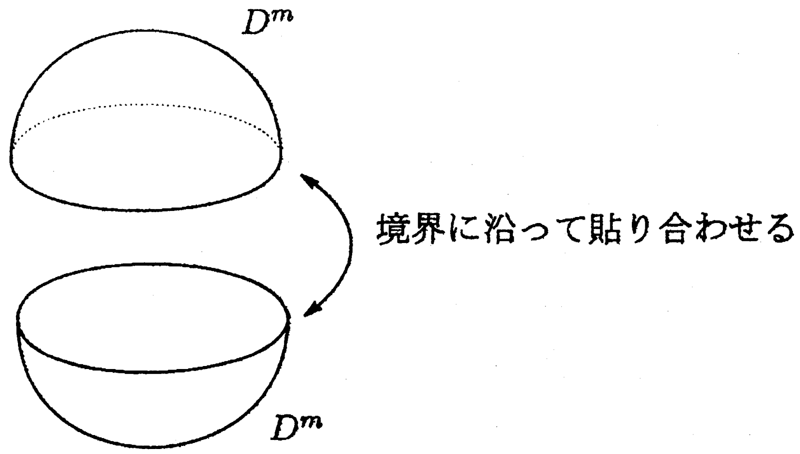

図 2: m 次元の almost sphere

念は一致する．ただし 6 次元以下では，almost sphere は標準的な球面と常に微分同相であることが知られている．(なお，すべての次元で almost sphere は標準的な球面に同相ではある.)

本稿では，各正則ファイバーが almost sphere の非交和となるような Morse 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ を考察する． 以下，そのような関数を **almost sphere fiber を持つ Morse 関数**と呼ぶ．念のため本稿における「Morse 関数」という言葉の意味を書いておこう（Morse 関数の詳細については [7, 8] 等を参照）．

定義 1.4 C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbb{R}$ のすべての臨界点が非退化であるとき，f を **Morse 関数**という．(異なる臨界点での値は必ずしも異なるとは限らないことに注意して欲しい.)

なお，Morse の補題により，各臨界点の近くでの関数 f の振る舞いは，非退化 2 次形式のそれと同じである．

2 特徴付け定理

本節では，almost sphere fiber を持つ Morse 関数を許容する多様体の微分同相類の特徴付け定理を紹介する．

以下 M は n 次元閉多様体であるとする．

命題 2.1 多様体 M が almost sphere fiber を持つ Morse 関数を許容するためには，M 上に，臨界値が高々3個の Morse 関数 $g: M \to \mathbb{R}$ が存在することが必要十分である．

証明. もし上のような g があったとする．g の最小値，最大値をそれぞれ a, b とし，それ以外の臨界値（がもしあればそれ）を c とおく．$a < c < b$ である．すると Morse の補題等（たとえば [8] を参照）から，勝手な $t \in (a,c) \cup (c,b)$ に対して $g^{-1}(t)$ は有限個の標準的な $n-1$ 次元球面の和と微分同相となる．よって特に g は almost sphere fiber を持つことになる．

逆に almost sphere fiber を持つ Morse 関数 $f: M \to \mathbb{R}$ があったとする．この Morse 関数に付随したハンドル分解を考えよう（たとえば [12] を参照）：

$$M = (h_1^0 \cup \cdots \cup h_{r_0}^0) \cup (h_1^{i_1} \cup \cdots \cup h_{r_1}^{i_{r_1}}) \cup \cdots \cup (h_1^n \cup \cdots \cup h_{r_\ell}^n).$$

ここで h_*^i は n 次元の i ハンドルを表し，各カッコ内のハンドルはちょうど一つの f の臨界点に対応するものとする．(最初の r_0 個の 0 ハンドルは f の最小値に対応し，最後の r_ℓ 個の n ハンドルは f の最大値に対応する．$\ell \geq 1$ である.) 必要ならこの分解をほんの少し（カッコの付け方だけ）修正することにより，1 番目から $\ell-1$ 番目の臨界点に対応するハンドルの指数は 0 でもなく n でもないとして良い．(つまり，0 ハンドルは最初に，n ハンドルは最後に持ってくる.)

最小値を 0 番目として数えて k 番目の臨界値まで $(0 \leq k \leq \ell)$ に対応するハンドルの和集合を M_k と書く：$M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_\ell = M$．仮定から f の正則ファイバーは常に almost spheres の非交和であるので，∂M_k は $n-1$ 次元の almost spheres の非交和である．したがって，∂M_k から小さな $n-1$ 次元開球体を取り除くと，それは $n-1$ 次元球体と微分同相となる．つまり，∂M_k $(0 \leq k \leq \ell - 1)$ に貼り付けるハンドルの「のりしろ」は，∂M_k 内の球体に含まれるとして良い．このことから，指数が 1 と $n-1$ の間のハンドルはすべて交わらないようにスライドさせることができることがわかる．

こうして，M は「3 段階」からなるハンドル分解を持つことがわかった．すなわち，まず 0 ハンドルをいくつか用意し，それに指数が 1 と $n-1$ の間にあるハンドルを同時に貼り付け，最後にいくつかの n ハンドルを貼り合せることにより M が得られる．これに対応する M 上の Morse 関

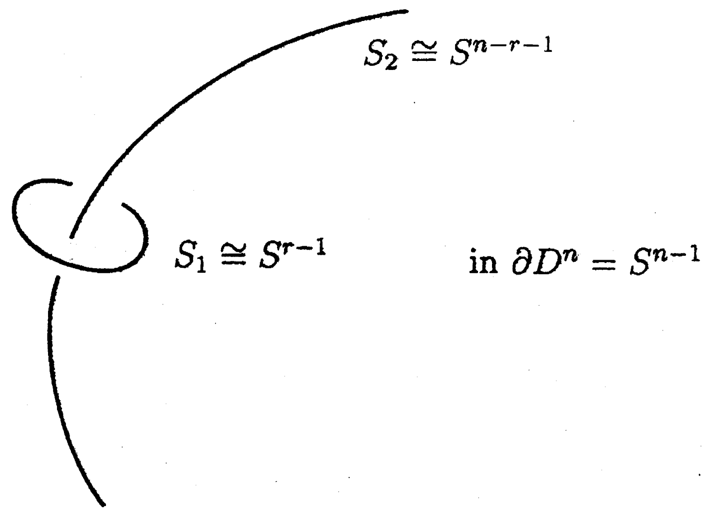

図 3: ∂D^n 内の 2 つの球面

数を $g : M \to \mathbb{R}$ とすれば，これは臨界点を高々3 個しか持たない Morse 関数となる． ■

次に命題 2.1 の性質を満たすような多様体 M の特徴づけ定理を述べよう．そのために以下の概念を導入する．

定義 2.2 r, n を自然数で $1 \leq r \leq n/2$ を満たすものとする．n 次元球体 D^n の境界 $\partial D^n = S^{n-1}$ 内に埋め込まれた $n-r-1$ 次元球面で，その法束が自明なものを S_2 とする．(この球面は，S^{n-1} 内に標準的に埋め込まれたものと必ずしも isotopic である必要はない.) さらに，その法円板束のファイバー Δ (次元は $(n-1)-(n-r-1)=r$ である) の境界 $\partial\Delta$ を S_1 とする (図 3 参照)．

D^n に，S_1 に沿って r ハンドルを，S_2 に沿って $n-r$ ハンドルを同時に貼り付けて得られる，コンパクトで境界を持った n 次元多様体を W と書く．境界 ∂W が $n-1$ 次元の almost sphere であるとき，W を **elementary handlebody** と呼ぶ．

$r = n/2$ のとき，D^n に，いくつかの r ハンドルを同時に貼り付けて得られる，コンパクトで境界を持った n 次元多様体を W' と書く．境界 $\partial W'$ が $n-1$ 次元の almost sphere であるとき，W' を **pseudo elementary handlebody** と呼ぶ．

本稿の主定理は次である．

定理 2.3 n 次元閉多様体 M が almost sphere fiber を持つ Morse 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ を許容するためには，$M \setminus \mathrm{Int}\, D^n$ が，有限個の elementary handlebodies ($n \equiv 0 \pmod 4$ のときは，有限個の elementary handlebodies と有限個の pseudo elementary handlebodies）の境界連結和と微分同相となることが必要十分である．

証明は，命題 2.1 の証明で登場したハンドル分解をうまい形に分解しなおすことにより行う．詳細は [11] を参照していただきたい．

主定理の系として次を示すことができる．

系 2.4 連結な n 次元閉多様体 M ($n = 3, 4, 5$) が almost sphere fiber を持つ Morse 関数を許容するためには，以下の多様体のいずれかと微分同相であることが必要十分である．

(i) $n = 3$:

$$S^3, \quad (\sharp^k S^1 \times S^2)\sharp(\sharp^\ell S^1 \tilde{\times} S^2).$$

（ここで，$S^1 \tilde{\times} S^2$ は S^1 上の non-orientable S^2 束の全空間であり，$k \geq 0$, $\ell \geq 0$, $k + \ell \geq 1$ である.）

(ii) $n = 4$: $M_1 \sharp M_2$．ただし，M_1 は

$$S^4 \quad \text{または} \quad (\sharp^k S^1 \times S^3)\sharp(\sharp^\ell S^1 \tilde{\times} S^3),$$

M_2 は 1 つの 0 ハンドル，いくつかの 2 ハンドル，1 つの 4 ハンドルからなるハンドル分解を持つ，単連結閉 4 次元多様体である．（ここで，$S^1 \tilde{\times} S^3$ は S^1 上の non-orientable S^3 束の全空間であり，$k \geq 0$, $\ell \geq 0$, $k + \ell \geq 1$ である.）

(iii) $n = 5$: S^5 または，

$$S^1 \times S^4,\ S^1 \tilde{\times} S^4,\ S^2 \times S^3,\ S^2 \tilde{\times} S^3$$

のコピー有限個の連結和．（ここで，$S^1 \tilde{\times} S^4$ は S^1 上の non-orientable S^4 束の全空間であり，$S^2 \tilde{\times} S^3$ は S^2 上の非自明な S^3 束の全空間である.）

系 2.5 M を連結な n 次元閉多様体 ($n \geq 3$) とし，$f : M \to \mathbb{R}$ を almost sphere fiber を持つ Morse 関数とすると，以下が成り立つ．

(i) M の基本群は自由群である．

(ii) $M \setminus \{1 点\}$ は球面のブーケとホモトピー同値である．

3 Special generic mapへの応用

もともとalmost sphere fiberを持つMorse関数を研究する動機はSGMの研究であった．自然なことであるが，我々の主結果の系として，SGMを許容する多様体の特徴づけ定理（[10]で得られている）の別証明を得ることができる．

系 3.1 連結なn次元閉多様体$(n \geq 2)$が$\mathbb{R}^2$へのSGMを許容するためには，

$$\Sigma^n \sharp (\sharp_i S^1 \times \Sigma_i^{n-1}) \sharp (\sharp_j S^1 \tilde{\times} \Sigma_j^{n-1})$$

の形をした多様体と微分同相となることが必要十分である．ここで，Σ^nはn次元のalmost sphereを，Σ_*^{n-1}は$n-1$次元のalmost sphereを表し，$S^1 \tilde{\times} \Sigma_j^{n-1}$は$S^1$上のnon-orientableな$\Sigma_j^{n-1}$束の全空間を表す．

証明． まず，上に挙げた多様体については，Cerf [2]のpseudo isotopy theorem等を用いることによって平面へのSGMを構成することができる．詳細はここでは省略する（[10]を参照）．

逆に，連結なn次元閉多様体M上にSGM $g : M \to \mathbb{R}^2$があったとする．このとき，直交射影$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$を十分ジェネリックに選ぶと，合成

$$f : M \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}$$

がMorse関数となることがわかる（たとえば[4]参照）．このときfの正則値yに対して，$f^{-1}(y) = g^{-1}(\pi^{-1}(y))$であるが，$\ell = \pi^{-1}(y)$は平面内の直線であり，しかも$g$と横断的であることがわかる．よって$g^{-1}(\ell)$は$n-1$次元閉多様体であり，しかも仮定より$g$はSGMであるから，

$$g|_{g^{-1}(\ell)} : g^{-1}(\ell) \to \ell$$

はMorse関数でその臨界点の指数は0または$n-1$であることがわかる．したがって，$g^{-1}(\ell)$の各連結成分はalmost sphereである．すなわち，fはalmost sphere fiberを持つMorse関数である．

さらに，fの臨界点の指数を考えると，それは$0, 1, n-1, n$のいずれかであることもわかる．これと定理2.3（の証明）より，Mが系3.1にあるような多様体に微分同相であることがわかる． ■

4　3次元の場合

定義域多様体 M が3次元の場合，Morse関数の正則ファイバーとして現れるのは閉曲面であり，M が向き付け可能なときは，正則ファイバーも向き付け可能な閉曲面となる．特に正則ファイバーとして種数の低い曲面しか現れないMorse関数を考えてみよう．

球面しか現れない場合は定理2.3及び系2.4で既に調べた．トーラスが現れる場合も考えると，次のことを証明することができる．

定理 4.1 M を連結で向き付け可能な閉3次元多様体とする．このとき，Morse関数 $f : M \to \mathbb{R}$ で，各正則ファイバーの各連結成分が球面かトーラスであるようなものが存在するためには，M が以下に挙げる多様体のいくつかのコピーの連結和と微分同相となることが必要十分である．

$$S^3,\ S^1 \times S^2,\ L(p,q).$$

ここで $L(p,q)$ $(p \geq 2)$ は (p,q) 型のレンズ空間を表す．

証明は，標準的な3次元多様体論を用いて行う．詳細は [11] を参照．

定理4.1は，3次元多様体上のMorse関数の正則ファイバーと，3次元多様体のいわゆるHeegaard分解（あるいはHeegaard genus）が深い関係にあることを示唆している．

5　多様体の不変量

この節では，多様体上の可微分関数に関連して定義される多様体の微分同相不変量と，関連したホモトピー不変量について述べる．

定義 5.1 M を n 次元閉多様体とする．
(1) M 上の Morse関数 の 臨界値 の個数の最小値を $\mu(M)$ と書く．
(2) M 上の 可微分関数 の 臨界点 の個数の最小値を $\mathrm{Crit}(M)$ と書く．

もちろん $\mathrm{Crit}(M)$ も $\mu(M)$ も多様体 M の微分同相不変量である．なお，歴史的には $\mathrm{Crit}(M)$ の方が古くから定義され，研究されてきているようである（たとえば [6] を参照）．

定義 5.2 以下 X を位相空間とする.

(1) X 内の開集合 U が **categorical** であるとは, 包含写像 $U \to X$ が null homotopic であるときを言う.

(2) X を覆う categorical な開集合の個数の最小値から 1 を引いた数を $\mathrm{cat}(X)$ と書き, X の **Lusternik–Schnirelmann category** と呼ぶ [6]. (もしそのような開集合族が存在しなければ, $\mathrm{cat}(X) = \infty$ と定める.)

(3) 1 点から出発して, それに「錐」(どんな空間の上の錐でも構わない) を添付していって X とホモトピー同値な空間を作るために必要な「錐」の個数の最小値を $\mathrm{Cl}(X)$ と書き, X の **cone length** と呼ぶ.

(4) 1 点から出発して, それに球面のブーケ上の「錐」を添付していって X とホモトピー同値な空間を作るために必要な「錐」の個数の最小値を $\mathrm{Cl}_S(X)$ と書き, X の **spherical cone length** と呼ぶ.

上述の $\mathrm{cat}(X)$, $\mathrm{Cl}(X)$, $\mathrm{Cl}_S(X)$ はすべて X のホモトピー不変量である (詳しくは [3, 5] 等を参照).

たとえば, 球面 S^n 上には臨界点の個数が丁度 2 個である Morse 関数が存在し, また S^n は, n 次元胞体 ($n-1$ 次元球面上の錐) を 1 点に添付することにより得られるので,

$$\mu(S^n) = \mathrm{Crit}(S^n) = 2,$$
$$\mathrm{cat}(S^n) = \mathrm{Cl}(S^n) = \mathrm{Cl}_S(S^n) = 1$$

となることが容易に分かる.

上で定義した不変量の間には一般に次の不等式が成り立つことが知られている.

命題 5.3 n 次元閉多様体 M $(n \geq 1)$ に対して, 以下が常に成り立つ.

$$\begin{aligned} 2 \leq \mathrm{cat}(M) + 1 \leq \mathrm{Cl}(M) + 1 \leq \min\{\mathrm{Cl}_S(M) + 1, \mathrm{Crit}(M)\} \\ \leq \max\{\mathrm{Cl}_S(M) + 1, \mathrm{Crit}(M)\} \leq \mu(M) \leq n + 1. \end{aligned}$$

§2 等の結果より, 次がわかる.

命題 5.4 n 次元閉多様体 M $(n \geq 1)$ に対して, 以下が成り立つ.

(1) $\mu(M) = 2$ となるためには, M が almost sphere となることが必要十分である.

(2) $\mu(M) \leq 3$ となるためには, M 上に almost sphere fiber を持つ Morse 関数が存在することが必要十分である.

上のことから，各 $k \geq 2$ に対して，$\mu(M) \leq k+1$ となるためには，Morse 関数 $f: M \to \mathbb{R}$ で，各正則値 $y \in f(M)$ に対して $\mu(f^{-1}(y)) \leq k$ となるものが存在することが必要十分であることが予想される．上の命題はこのことが $k=2$ のときに正しいことを主張している．

注意 5.5 $f: M \to \mathbb{R}$ を閉多様体 M 上の Morse 関数とする．[9, Theorem 1.1] をうまく適用することにより，もし各正則値 $y \in f(M)$ に対して $\mu(f^{-1}(y)) \leq k$ が成り立てば，$\mathrm{cat}(M) \leq 2k+1$ となることは証明できる．

さて，命題 5.3 より，$\mathrm{Crit}(M)$ と $\mathrm{Cl}_S(M)+1$ の比較が問題となるが，次を具体的構成により示すことができる．

命題 5.6 勝手な正の整数 k に対して，ある閉多様体 M_k（その次元は k に依存する）が存在して，

$$(\mathrm{Cl}_S(M_k)+1) - \mathrm{Crit}(M_k) \geq k$$

となる．特に，差

$$\mu - \mathrm{Crit}$$

はいくらでも大きくなり得る．

上のことは，必ずしも Morse 関数とは限らない関数を考えると，臨界点や臨界値の個数を大幅に節約できることを示している．

最後に問題として次を挙げておく．この問題は難しく，もし解ければ 3, 4 次元におけるポアンカレ予想が解けることになる．

問題 5.7 $\mathrm{Crit}(M)$ や $\mu(M)$ は多様体 M のホモトピー不変量か？

参考文献

[1] O. Burlet and G. de Rham, *Sur certaines applications génériques d'une variété close à 3 dimensions dans le plan*, Enseign. Math. **20** (1974), 275–292.

[2] J. Cerf, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., No. 39 (1970), 5–173.

[3] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea and D. Tanré, *Lusternik-Schnirelmann category*, Mathematical Surveys and Monographs, 103, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[4] T. Fukuda, *Topology of folds, cusps and Morin singularities*, in "A Fete of Topology", eds. Y. Matsumoto, T. Mizutani and S. Morita, Academic Press, 1987, pp. 331–353.

[5] 岩瀬則夫『ガネア予想と Lusternik-Schnirelmann カテゴリーの最近の発展』数学 **56** (2004), 281–296.

[6] L. Lusternik and L. Schnirelmann, *Méthode topologiques dans les problèmes variationnels*, Hermann, Paris, 1934.

[7] 松本幸夫『Morse 理論の基礎』岩波講座「現代数学の基礎」27巻，岩波書店, 1997.

[8] J. Milnor, *Morse theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells, Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

[9] J. Oprea and J. Walsh, *Quotient maps, group actions and Lusternik-Schnirelmann category*, Topology Appl. **117** (2002), 285–305.

[10] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. **49** (1993), 265–293.

[11] O. Saeki, *Morse functions with sphere fibers*, Hiroshima Math. J. **36** (2006), 141–170.

[12] 田村一郎『微分位相幾何学』岩波書店，1992.